

**SÍNTESIS DE LAS METODOLOGIA DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
DE CÁLCULO ABIERTO BASADO EN NÚMEROS (ABN) Y DE CÁLCULO
CERRADO BASADO EN CIFRAS (CBC)**

**SUMMARY OF THE METHODOLOGY FOR TEACHING MATHEMATICS WITH
THE "OPEN CALCULUS BASED ON NUMBERS" (ABN) AND "CLOSED
CALCULUS BASED ON DIGITS" (CBC) APPROACHES**

Jaime Martínez-Montero, Manuel Aguilar & José I. Navarro¹

¹ El físico y especialista en didáctica de las matemáticas de la Universidad de Cádiz Dr. José Carlos Piñero y el matemático de la Universidad de O'Higgins (Chile) Dr. Carlos Pérez Wilson han colaborado en la revisión y traducción técnica del documento.

I. SECUENCIA DE LAS OPERACIONES. SEQUENCE OF MATHEMATIC OPERATION

CBC	ABN												
<p>El aprendizaje del algoritmo supone un conjunto de instrucciones que se tienen que aplicar de una manera determinada con poca flexibilidad. La primera es, saber por dónde se tiene que comenzar. Es lo primero con lo que se enfrenta el alumno. Se debe comenzar siempre por la derecha.</p> <p>Learning algorithms involves a set of instructions that have to be applied in a certain order with little flexibility. The first is knowing the starting position (the first thing that the student meets): "You should always start from the right". For example:</p> $\begin{array}{r} 391 - \\ \underline{248} = \\ 143 \end{array}$	<p>En los algoritmos ABN el orden de abordaje pierde relevancia.</p> <p>El orden viene derivado de la descomposición en números menores que hagan los alumnos. Esta descomposición va a depender de la estrategia que se haya marcado para resolver la operación. Y esta estrategia va a depender directamente del grado de competencia en el cálculo que hayan alcanzado los alumnos. Por ejemplo:</p> <p>In ABN algorithms, the starting position is not relevant.</p> <p>The solving order is a consequence of the specific decomposition into smaller numbers made by the students. This decomposition will depend on the strategy that student has been set to solve the mathematic operation. And this strategy will depend directly on the degree of calculation competence that students have reached. For example:</p> <table border="1" data-bbox="810 1167 1275 1323"> <tr> <td>-</td> <td colspan="2">391 - 248 = 143</td> </tr> <tr> <td>383</td> <td>-8</td> <td>240</td> </tr> <tr> <td>183</td> <td>-200</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>143</td> <td>-40</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>En la <i>sustracción</i> que se presenta, el alumno ABN ha elegido <i>detraer</i> primero las unidades, luego las centenas y finalmente las decenas.</p> <p>In this 3-digit subtraction, the ABN student has chosen first subtracting the units (ones), then the hundreds, and finally the tens.</p>	-	391 - 248 = 143		383	-8	240	183	-200	40	143	-40	0
-	391 - 248 = 143												
383	-8	240											
183	-200	40											
143	-40	0											

II. DESCOMPOSICIÓN DE LOS CÁLCULOS DESDOBLADOS (SPLITTING CALCULATION)

CBC	ABN
<p>La esencia del cálculo tradicional (CBC) consiste en que se han de descomponer los números</p>	<p>En ABN se pueden descomponer los números que componen las operaciones con flexibilidad cuantas veces sean precisas.</p>

con los que se opere en sus diversos órdenes de magnitud. A continuación, se comienza a realizar el cálculo del emparejamiento que se haya producido. Ese cálculo se hace de una vez para cada emparejamiento, y la fragmentación de las cantidades garantiza que no haya ninguna combinación distinta a la que se ha memorizado gracias al aprendizaje de las tablas. Así, el niño suma, resta, multiplica o divide en un solo intento las unidades, decenas, las centenas, etc. Si el cálculo es complicado o tiene algún problema en recordar algún resultado de la tabla, la cuenta saldrá mal, porque no hay plan alternativo.

The fundamentals of traditional calculus (CBC) consist in breaking down the operating numbers into their composing orders of magnitude. Next, the calculation is done once for each magnitude pairing. Here, the fragmentation of the quantities guarantees that there is no other possible combination than the one that was memorized thanks to the learning of the multiplication table. Thus, the child adds, subtracts, multiplies or divides units, tens, hundreds, etc. in a single attempt. If the calculation turns complicated or you have a difficulty remembering a result from the multiplication table, the calculation will fail, because there is no alternative plan.

In the ABN algorithm, the numbers of the math operation can be broken down with flexibility, as many times as necessary.

Ejemplos. Here are some example

En la operación siguiente, que corresponde a una sustracción comparativa (391-248), la segunda centena del minuendo se desdobra en bastantes números.

In the following math operation, corresponding to a comparative-subtraction (391-248), the second hundred of the minuend is divided into many numbers.

	391 - 248 = 143	
291	-100	148
283	-8	140
252	-31	109
242	-10	99
222	-20	79
202	-20	59
200	-2	57
160	-40	17
155	-5	12
153	-2	10
143	-10	0

En el ejemplo de la *suma* que ofrecemos (3897 + 2576), que corresponde a un alumno de 3º de Educación Primaria (8 a 9 años), este ha desdoblado las ocho centenas en cinco y tres. Lo ha hecho para mejor ajustar los cálculos.

In the addition example (3897 + 2576), corresponding to a 3rd grade Primary Education student (8 to 9 years old), he has divided the eight hundred into five and three. He did that way to better adjust the calculations.

	3897+ 2576 = 6473	
3000	897	5576
500	397	6076
300	97	6376
90	7	6466
7	0	6473

III. CÁLCULOS CON INTEGRACIÓN (CALCULATIONS WITH RE-GROUPING)

Llamamos aquí *integración* cuando, para operar, se juntan diversos órdenes de magnitud en un solo cálculo, bien de manera completa o de manera parcial. Por ejemplo, se juntan las decenas y después se suman las unidades y se reagrupan después. Por ejemplo: $38 + 57$. El alumno puede operar inicialmente con $30 + 50 = 80$; y después $7 + 8 = 15$. Finalmente agrupa $15 + 80 = 95$.

We call **RE-GROUPING** here when, to operate, several orders of magnitude are taken together in a single calculation, either completely or partially. Such as when the tens are put together and then the ones are added and then regrouped. For example: $38 + 57$. The student can initially operate with $30 + 50 = 80$; and then $7 + 8 = 15$. Finally, he/she groups $15 + 80 = 95$.

CBC	ABN																														
<p>En el cálculo tradicional <i>no es posible</i> calcular a la vez más de un orden de magnitud.</p> <p>In (CBC) traditional calculation it is not possible to calculate more than one order of magnitude at a time.</p>	<p>Sí se hace en el formato ABN. Vemos varios ejemplos: Re-Grouping is possible using ABN approach. Here we are an example: Ejemplo</p> <table border="1" data-bbox="624 1093 999 1285"> <tr> <td></td> <td colspan="2">5863 + 2436 = 8299</td> </tr> <tr> <td>2200</td> <td>8063</td> <td>236</td> </tr> <tr> <td>200</td> <td>8263</td> <td>36</td> </tr> <tr> <td>30</td> <td>8293</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>8299</td> <td>0</td> </tr> </table> <table border="1" data-bbox="624 1368 999 1561"> <tr> <td></td> <td colspan="2">1729 + 1854 = 3583</td> </tr> <tr> <td>1000</td> <td>2729</td> <td>854</td> </tr> <tr> <td>300</td> <td>3029</td> <td>554</td> </tr> <tr> <td>550</td> <td>3579</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>3583</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>En la operación matemática 1729+1854, el alumno ha integrado (tercera fila) las decenas del segundo sumando con las centenas que le quedaron del cálculo anterior. Lo hace así por conveniencia de sus cálculos. No lo hizo en la fila anterior porque ahí busco redondear hasta 3000. En la operación situada a la derecha, integra en los millares del segundo sumando (primera fila de la operación) parte de las centenas del mismo (854). Es decir, que se maneja el desdoble del mismo orden de magnitud y la integración de las mismas a la vez, en función de la estrategia que se haya marcado el sujeto. Esto otorga un elevado nivel de</p>		5863 + 2436 = 8299		2200	8063	236	200	8263	36	30	8293	6	6	8299	0		1729 + 1854 = 3583		1000	2729	854	300	3029	554	550	3579	4	4	3583	0
	5863 + 2436 = 8299																														
2200	8063	236																													
200	8263	36																													
30	8293	6																													
6	8299	0																													
	1729 + 1854 = 3583																														
1000	2729	854																													
300	3029	554																													
550	3579	4																													
4	3583	0																													

flexibilidad, imposible de llevar a cabo con la metodología antigua.

Rational: In $1729 + 1854$, the student has combined (third row) the tens of the second addend with the hundreds that remained from the earlier calculation. He/she does so for the convenience of his calculations. He did not do it in the previous row because there he rounded up to 3000. On the right side, he integrates part of the hundreds of the same (854) into the thousands of the second addend (first row of the operation). It is: the unfolding and integration of the same order of magnitude is carried out at the same time. It is depending on the strategy that the student has made a choice. This allows a high level of flexibility, impossible to achieve with the traditional methodology.

	696+ 1078+ 2436= 4210	
96	1008	3106
6	8	4196
--	-	4210

	696+ 1078+ 2436= 4210	
96	1008	3106
6	8	4196
--	-	4210

En el ejemplo **$696 + 1078 + 2436 = 4210$** , se observa la ejecutoria de un alumno muy competente que resuelve la operación en muy pocos pasos. Ello es gracias a que calcula a la vez con varios órdenes de magnitud. En la *primera* fila ha integrado seis centenas del primer sumando con siete decenas del segundo sumando. En la *segunda* fila, ha reunido el millar del segundo sumando con las nueve decenas del primero. Finalmente, suma las unidades.

Rational: In the example $696 + 1078 + 2436 = 4210$, the execution of a very competent student who solves the operation in very few steps is presented. The student calculates several orders of magnitude at the same time. In the first row, he has combined six hundreds of the first addend with seven tens of the second addend. In the second row, he has re-grouped the thousands of the second adding with the nine tens of the first. Finally, he adds up the units.

	<p>Esta característica no la tiene sólo la operación de sumar, sino que concierne a todas.</p> <p>This feature is not only found in the addition operation, but concerns all of them.</p> <p>En el caso de la división (ver ejemplo abajo 933 :3) pertenece a un alumno de 2º de Educación Primaria, el niño ha efectuado de una vez el cálculo correspondiente a centenas y decenas. Se podrá argüir que en la división CBC ocurre igual cuando la correspondiente unidad del dividendo es menor que la del divisor. En Efecto, aunque lo que se muestra aquí es la integración de dos órdenes de magnitud distintas cuando no hacía falta, puesto que la cifra de las centenas del dividendo es mayor que la del divisor.</p> <p>The division below (see example 933:3) belongs to a 2nd year of Primary Education student (7 to 8 aged). The child has carried out the calculation corresponding to hundreds and tens at once. It could be argued that in the CBC-approach division the same thing happens when the corresponding unit of the dividend is smaller than that of the divisor. Indeed, although what is shown here is the integration (Re-Grouping) of two different orders of magnitude when it was not necessary, since the hundreds digit of the dividend is larger than that the divisor.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td></td> <td colspan="2" style="text-align: center;">933 : 3</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">933</td> <td style="border-right: 1px solid black;">930</td> <td>310</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;">3</td> <td style="border-right: 1px solid black;">3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>311</td> </tr> </table>		933 : 3		933	930	310	3	3	1			311
	933 : 3												
933	930	310											
3	3	1											
		311											

IV. NO SE UTILIZAN LAS "LLEVADAS". THE "CARRY"/"BORROW" ARE NOT USED

CBC	ABN
Las "llevadas" son estrategias inventados para salvar las dificultades de un formato, pero que no tienen su reflejo en la realidad. Cuando, en el caso de la resta tradicional se produce una "llevada", lo que	En el cálculo ABN se utilizan otro tipo de estrategias. Se manejan los números de la misma manera que las cantidades. Por ello desaparece las "llevadas". Por ejemplo:

se da en la realidad es un añadido. Se suman diez a cada uno de los términos. Lo que ocurre es que en el caso del minuendo se hace en la cifra de las unidades (diez) y en la del sustraendo en la de las decenas (uno).

$$\begin{array}{r}
 -1 \\
 47 \\
 - 19 \\
 ---- \\
 28
 \end{array}$$

The carry is a characteristic artifact of the CBC model, which is produced when a ten/hundred/thousand is completed. So, this a purely CBC-related phenomenon with no immediate connection to the original operation. When, in the case of traditional subtraction, a "borrow" occurs, what actually occurs is an addition (the student adds ten to each of the terms.) So that in the case of the minuend it is done in the units-digit (ten) and in the subtrahend in the tens (one).

Other types of strategies are used in the ABN approach. Numbers are handled in the same way as quantities. That is why the "carry" and "borrow" disappear. For example:

	485 - 198 = 287	
385	-100	98
305	-80	18
297	-8	10
287	-10	0

	129 + 274 = 403	
100	374	29
20	394	9
9	403	0

Las dos operaciones corresponden al 2º curso de Educación Primaria (7 a 8 años). Ambas contienen "llevadas difíciles". En la suma y en la resta aparecen en la cifra de las unidades y en la de las decenas. En la adición de **129+274** el alumno ha ido añadiendo paso a paso de magnitud.

Both math operations ($485 - 198 = 287$, **and** $129 + 274 = 403$) fits to the 2nd Primary Education grade (7 to 8 years). Both contain difficult "carries" and "borrows". In addition and subtraction, they are present in the units and in tens. In the addition of $129+274$ the student has been adding step by step of magnitude.

En la sustracción, con llevadas consecutivas en unidades y decenas, el alumno va trayendo conforme le viene bien, y reduce las dificultades descomponiendo el sustraendo en números menores porque así resuelve mejor el cálculo: primero quita cien, luego ochenta, luego ocho y, por último, los diez restantes.

In subtraction, with consecutive "borrows" in units and tens, the student subtracts following his/her estimation, thus reducing the difficulty by breaking down the subtrahend into smaller numbers. In doing so, he solves

	calculation easier: first removes one hundred, then eighty, then eight and, finally, the remaining ten.
--	---

V. EL "REDONDEO" Y LA "COMPENSACIÓN" COMO ESTRATEGIAS HABITUALES.
"ROUNDING" AND "OFFSET ADJUSTMENT" AS USUAL STRATEGIES IN MATHEMATICS.

Hablamos de **redondeo** cuando, antes de realizar los cálculos, los alumnos realizan ajustes en los términos de la operación con el fin de poder calcularla de una forma rápida y sencilla. Por ejemplo, en la suma **199 + 256**, un alumno competente añade 1 (del 256) a 199 para obtener 200. A partir de ahí la operación se resuelve con mayor rapidez: **200 + 255 = 455**. Por supuesto se pueden utilizar más tipos de **redondeo**.

Rounding is making adjustments on the terms of the operation prior to perform the calculations, to make students able to calculate quickly and easily. For example, in the addition $199 + 256$, a competent student adds 1 (from 256) to 199 to get 200. From there the calculation is solved easier: $200 + 255 = 455$. Different rounding types can be used.

Nos referimos a **compensación** cuando el niño que realiza el cálculo, ya iniciada la operación, opera con un número distinto o no presente, pero que es más sencillo. Una vez hecho, compensa la tarea añadiendo o quitando el exceso o defecto de la compensación. Para entenderlo mejor veremos tres ejemplos.

Compensation is when the child who performs the calculation, once the operation has started, operates with a different number or one that is not present, but is simpler. Once done, the task is solved by adding or subtracting the over or under compensation. To understand it better we will see three examples.

ABN METHOD		
391 - 248 = 143		
-	191	48
-40	151	8
-10	141	
+2	143	0

En el caso de **391 - 248**, el alumno entiende en el segundo cálculo a que en el sustraendo sólo le queden 8 unidades y detraer 10, que es muy sencillo. Una vez hecho esto, y como ha quitado dos de más, en el siguiente cálculo lo compensa añadiendo 2. Se explica muy bien con los signos que va colocando el propio niño.

	<p>In 391 - 248, the student understands in the second-row calculation that only 8 units remain in the subtrahend; then, subtract 10, which is very simple. Once this is done, and since he has removed up two more, in the following calculation step he/she compensates by adding 2. The process could be followed well with the math symbols that the student himself writes.</p>												
<table border="1" data-bbox="240 667 663 835"> <tr> <td></td> <td colspan="2">179 + 206 = 385</td> </tr> <tr> <td>+200</td> <td>379</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>+10</td> <td>389</td> <td></td> </tr> <tr> <td>-4</td> <td>385</td> <td>0</td> </tr> </table>		179 + 206 = 385		+200	379	6	+10	389		-4	385	0	<p>En la suma 178 + 206 se ha seguido la misma estrategia. Se ha buscado conscientemente la táctica de dar los menores pasos posibles en la resolución de la operación. El alumno ha comenzado sumando 200. Después, en lugar de sumar 6, lo hace con 10. Como se pasa en 4, en la siguiente fila lo compensa.</p> <p>In 178 + 206 the same strategy has been followed by the student. The approach of taking the lesser possible steps to solve the math-operation has been deliberately pursued. The student has started by adding 200. Then, instead of adding 6, he adds 10. As he goes over 4, he makes-up-for it in the next row.</p>
	179 + 206 = 385												
+200	379	6											
+10	389												
-4	385	0											
<table border="1" data-bbox="240 1299 564 1503"> <tr> <td>364</td> <td>138</td> </tr> <tr> <td>-</td> <td>164</td> </tr> <tr> <td>-30</td> <td>134</td> </tr> <tr> <td>+4</td> <td>138</td> </tr> <tr> <td>226</td> <td></td> </tr> </table>	364	138	-	164	-30	134	+4	138	226		<p>Mención especial merece la operación recogida en esta tabla referente a una resolución de un problema. La estudiante es una alumna de 7 años (2º de Educación Primaria) que inventó el problema. Lo resuelve “en escalera descendente” (de mayor a menor). El problema es: <i>un ascensor de un rascacielos muy alto bajaba desde el piso 364 hasta el 138. Se preguntaba por el número de pisos que había que bajar.</i> La niña hizo bajar 230 pisos, y luego ascendió 4. Lo que es más notable es la madurez que demuestra en el uso de los signos: suma los negativos y resta el positivo, pese a que la interpretación literal de los mismos le empujaría a hacer lo contrario.</p> <p>Special mention deserves the math-operation collected in this table. The student is 7-year-old (2nd grade, Primary Education) who <i>invented</i> by herself the problem. She</p>		
364	138												
-	164												
-30	134												
+4	138												
226													

	<p>solves it "<i>in a descending ladder</i>" (from largest number to smallest). The problem said: "an elevator in a very tall skyscraper went down from the 364th floor to the 138th floor. She was wondering how many floors she had to go down". The student went down 230 floors, and then went up 4. It is remarkable the maturity she shows in using symbols: she adds the negatives and subtracts the positive, in spite of that the literal interpretation of them would push her to do otherwise.</p>
--	---

VI LA RECURSIVIDAD O REVERSIBILIDAD. RECURSIVITY OR REVERSIBILITY

CBC	ABN															
<p>Se da una falta de recursividad. Los cálculos se hacen siempre siguiendo los mismos pasos procedimentales.</p> <p>There is a lack of reversibility. Calculations are always made following the same routine steps.</p>	<p>Los algoritmos ABN pueden aplicar la recursividad, o sea la posibilidad que los diversos cálculos se lleven a cabo en una u otra dirección, en función de la estrategia. Ponemos un ejemplo.</p> <p>ABN algorithms can apply reversibility. That is, the possibility that calculation are carried out in one direction or another, depending on the strategy. Let us give an example.</p> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr> <th colspan="3" style="text-align: center;">788 + 1462</th> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">788</td> <td style="text-align: center;">1462</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">600</td> <td style="text-align: center;">188</td> <td style="text-align: center;">2062</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">12</td> <td style="text-align: center;">200</td> <td style="text-align: center;">2050</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">200</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">2250</td> </tr> </table> <p>La tabla muestra la suma 788 + 1462. El alumno comienza a añadir el sumando más pequeño (788) en el mayor (1462). Añade 600 para redondear al millar. Y entonces se da cuenta de que si añade 12 al sumando menor (188) obtiene 2050, por lo que redondea a 200. Convirtiendo el sumando en 200 se avanza mucho en la resolución de la suma. Es lo que hace en la última fila. Llamamos a esto reversibilidad o recursividad porque se cambia el sentido del cálculo para realizar otro más ventajoso que el que tendría que hacer si hubiese seguido la misma dirección. En realidad, la recursividad es la búsqueda de un <i>redondeo sobrevenido</i> para acortar la resolución o llegar antes al resultado.</p>	788 + 1462			+	788	1462	600	188	2062	12	200	2050	200	0	2250
788 + 1462																
+	788	1462														
600	188	2062														
12	200	2050														
200	0	2250														

	<p>Table shows the sum 788 + 1462. The student begins by adding the smaller addend (788) to the larger addend (1462). Add 600 rounding to the nearest thousand. Then, she realizes that if by adding 12 to the lesser addend (188) one gets 2050. So, she rounds to 200. Making the addend 200 she goes a long way forward solving the sum. It's what she does in the last row. We call this "<i>reversibility</i>" (or recursion) because the direction of the calculation is changed in order to achieve other more advantageous calculation than the one it would have to do if following the same direction. In fact, <i>reversibility</i> is the look for a supervening rounding to shorten the solution or reaching the result earlier.</p>
--	--

VII. PRÁCTICA SIMULTÁNEA DE TODA LA ESTRUCTURA SIMULTANEOUS PRACTICE OF THE WHOLE STRUCTURE

Español	English Version
<p>La resolución de los algoritmos ABN de suma y resta conlleva, por su propia lógica, la práctica simultánea de la operación inversa a la que se trate. En el caso de la suma, la cantidad que añada debe descontarla del sumando, y así sucesivamente hasta consumir éste, hasta dejarlo en 0. Es decir, que se realizan dos operaciones simultáneas o, dicho de otro modo, se practica toda la estructura aditiva y no sólo uno de sus casos.</p>	<p>The resolution of addition and subtraction in ABN algorithms involves, -by its own logic-, the simultaneous practice of the reverse operation. In the case of the addition, the amount added must be removed from the addend, as many times as needed until the remaining addend is left at 0. That is, two simultaneous operations are performed or, in other words, the entire additive structure is practiced and not just one of its elements.</p>
<p>EJEMPLO (del autor). En un primer momento debemos separar los órdenes de magnitud (unidades, decenas, centenas ...) y actuar con ellos de forma independiente, de manera tal que no se mezcle la exigencia del nuevo formato con la complejidad del cálculo. Veamos lo que se quiere decir en el caso de la suma de 283 + 169. Esta vez no lo hacemos como lo hace un niño, sino explicándolo a nuestros lectores.</p>	<p>Example (author's): At first, one should separate orders of magnitude (units, tens, hundreds ...) and operate independently with each order of magnitude -so that there is no mixture between the new calculus and the exigences of the new calculation format-. Lets see the meaning of this in the case 283 + 169. This time we are not proceeding as a child, but explaining to the readers.</p>

<p>En primer lugar, se consideran las centenas. El alumno selecciona 100 (de 169) en el ejemplo. Esto se puede hacer fácilmente: $200 + 100 = 300$. Al resultado se le añaden los 83 restantes del primer sumando. Al segundo número (169) se le resta 100. El resultado es que quedan 69 por añadir del segundo sumando (169).</p>	<p>First, hundreds are considered. In the example, the student's choice is that of 100 (from 169). This can be done easily: $200 + 100 = 300$. To this result, the remaining 83 from the first addend are added. Then, a hundred is subtracted to the second number (169). The result is that still 69 remains to be added to the second addend (169).</p>
--	---

	283	+169
100	383	69

Español	English Version
<p>En segundo lugar, se calculan las decenas. «Aislamos» 80 (nunca 8) y las sumamos con 60, obteniendo 140. A continuación, sumamos 300 más 140, y obtenemos 440, a cuyo número le añadimos las 3 unidades (443).</p>	<p>At second, tens are calculated. The 80 is "isolated" (one never isolates the 8) and is added to 60, obtaining 140. Next, 300 is added to 140, obtaining 440. To this number, 3 units are added (443).</p>

	283	+169
100	383	69
60	443	9
9	452	0

Español	English Version
<p>En tercer lugar, se calculan las unidades. Las 3 unidades se separan y queda el número 440. Se suman las unidades, que dan doce. Y a continuación se hace mentalmente el cálculo final: $440 + 12 = 452$. Este sería el fin de la operación.</p>	<p>Third, units are considered. The remaining 3 units are separated so that the remaining number is 440. Units are then added, resulting in 12. Next, the final calculation is carried out mentally $440+12 = 452$; which is the end of the operation.</p>

<p>En este paso de introducción se ha seguido operando orden de magnitud a orden de magnitud, como en el cálculo tradicional, aunque con dos diferencias grandes. La primera es que se ha hecho en orden inverso: de izquierda a derecha. Y la segunda es que se han sumado números, no las cifras que ocupan un determinado lugar. Así, se han reunido cien y doscientos, sesenta y ochenta y, finalmente, nueve y tres. Insistimos en el cuidado que se ha de llevar en los primeros pasos.</p>	<p>In this introductory step, the operation has been solved order by order of magnitude -as in the traditional calculation- while two major differences. The first difference is that the operation has been solved in a reverse order: left to right. The second is that numbers has been added, rather than digits placed in a determined position. So, 100 and 200 were added, as well as 60 + 80 and, finally, 9 and 3. It has to be noted that the first steps have to be carried out carefully.</p>
<p>En esencia se ha de aislar el orden de unidad con el que se vaya a operar y, una vez operado, se une a la suma que ya se haya realizado.</p>	<p>Mainly, on has to isolate the order of the unit which is going to be operated and, once operated, it is added to the already carried out addition.</p>

	283	+169
100	383	69
60	443	9
9	452	0

Español	English Version
<p>Se utilizan tres formatos y, por tanto, tres modos diferentes de realizarlo. En el formato de comparación-detracción (CD), por su propia mecánica, no requiere del empleo simultáneo de ambos procesos. Pero en los formatos de escalera ascendente (EA) y escalera descendente (ED), se practica la suma de una forma natural. En EA prácticamente la sustracción se convierte en una suma, tanto para alcanzar los resultados parciales como el resultado final. En ED se ha de emplear la suma para hallar el resultado final.</p>	<p>Three formats were used and, so, three different ways for solving. The comparison-detraction format (CD), by its inner mechanics, doesn't require the simultaneous use of both processes. However, in the ascending ladder (AL) and descending ladder (DL), the addition is carried out in a more natural way. In the AL, subtraction is effectively converted into an addition; as to reach partial results as the final result. In the DL, addition must be carried out to reach the final result.</p>
<p>(Ejemplos del autor). 1. La resta como detracción. Es el caso más general. Dada una cantidad, se detrae parte de esta y se quiere averiguar cuánto queda. Es un enfoque muy clásico. Hasta seis</p>	<p>(Author's examples) 1. Subtraction as detractation. The generic situation. Given a quantity, another quantity is detracted and one has to look for the remaining quantity. This constitutes a classic</p>

situaciones diferentes se pueden solucionar con este tipo de problemas:	perspective which can lead up to 6 different situations for this kind of problem:

CA2	Tengo 8 €. Me gasto 3. ¿Cuántos me quedan?	Got 8 €. Spent. How many left?
CO2	Hay 9 bombones de chocolate blanco y negro. Si hay 5 de chocolate blanco, ¿cuántos hay de chocolate negro?	We've 9 black and white chocolates. 5 of them are White chocolates, how many are black ones?
CM4	Andrés tiene 14 años, y Ana tiene 5 menos que él. ¿Cuántos años tiene Ana?	Andrew is 14 years old, and Anna is 5 years younger. What's the age of Anna?
IG6	Tengo 9 caramelos, y si me como 5 me van a quedar los mismos que a ti. ¿Cuántos tienes tú?	I got 9 candies, if I ate 5... I'll have the same tan you. How many candies do you have?
CM5	Tengo 12 años, y tengo 3 años más que tú. ¿Cuántos tienes tú?	I'm 12 years old, and I'm 3 years older tan you. How old are you?
IG3	Tengo 12 años. Si Raquel tuviera 3 años más, tendría los mismos que tengo yo. ¿Cuántos años tiene Raquel?	I'm 12 years old. If Rachel would be 3 years older, she would have my same age. How old is Rachel?
Las letras y número que aparecen en la columna de la izquierda son las claves de identificación de los tipos de problemas; CA: Cambio; CO: Combinación; CM: Comparación; IG: Igualación.		Letters and numbers of the left column are the identification keys of the problems; CA: Exchange, CO: combination; CM: Comparison; IG: Equalization

2. La resta como escalera ascendente . Es el problema que más tiene que ver con el sistema de «vueltas»: partes de una cantidad y vas añadiendo hasta que llegas a otra. Lo que has añadido es el resultado. Hay dos situaciones que ejemplifican este tipo de proceso:	2. Subtraction as ascending ladder. Is a kind of problem which is similar to a "iteration" system: one starts from an initial quantity and adds till reach another one. The result is what is being added to. Two situations may exemplify this process:
--	--

CA3	Tenía 6 canicas, y después de jugar tenía 11. ¿Cuántas ha ganado?	I had 6 marbles and, after playing I had 11. How many did I won?
IG1	Nelia tiene 7 muñecas y Andrea 12. ¿Cuántas más tiene que tener Nelia para tener las mismas que Andrea?	Nelia has 7 dolls, Andrea has 12. To have the same

<p>Cabe pensar si las dos situaciones anteriores son más de sumar que de restar. En cualquiera de los dos casos se trata de añadir al número más bajo, hasta que se llegue al más alto. Y una vez hecho esto, se suma todo lo añadido para llegar al resultado.</p>	<p>One could think that both situations are “addition situations” rather than subtraction ones. In both two previous cases one has to add to the minor number an amount till reaching the major number. Once this is done, one has to combine all that was added to reach the result.</p>
---	---

Español	English version
<p>3. La resta como escalera descendente. Es el caso inverso al anterior y complementario del proceso de detracción. Tengo una cantidad, y de ella he de detraer una cantidad indeterminada: la precisa para dejar un número exacto pretendido. Se suelen proponer tres situaciones para ejemplificar este proceso:</p>	<p>3. Subtraction as descending Ladder: This is the opposite situation to the previous one, and compliments the detracting process. One has a quantity to whom another undetermined quantity has to be detracted (indeed, the exact one to deliver the initial number). One could propose three different situations:</p>

CA4	Había 8 piezas de fruta. Se han comido algunas y quedan 3. ¿Cuántas se han comido?	There were 8 fruit pieces. Somebody ate some pieces so that 3 remains. How many does he ate?
CA5	Me dan 4 cromos, y con los que tenía reúno 9. ¿Cuántos tenía antes de que me dieran nada?	They give me 4 stamps, so I gather a total of 9. How many stamps did I had before?
IG2	Nelia tiene 7 muñecas y Andrea 12. ¿Cuántas muñecas menos tiene que tener Andrea para tener las mismas	Nelia has 7 dolls, Andrea has 12. To have the same dolls, how many less does Andrea have to drop?

<p>La complementariedad respecto al proceso de detracción es obvia. En el primer caso se sabe la cantidad inicial y lo que hay que detraer, y se averigua lo que queda. En el segundo caso se sabe la cantidad inicial y lo que ha de quedar, y se averigua lo que hay que detraer.</p>	<p>The complementization with respect to the detracting process becomes obvious. In the first case, one knows the initial quantity and the quantity to be detracted (so that one must look for the remaining quantity). In the second case one knows the initial quantity and the quantity that has to remain, so one looks for what have to be detracted.</p>
---	--

<p>4. La resta como comparación. Es el proceso más difícil, que añade complejidades</p>	<p>4. Subtraction as comparison. This is the most difficult process, adding complexities</p>
--	--

<p>por el uso del lenguaje y recoge una situación muy común. En esencia, se tienen dos cantidades desiguales y en la mayor se marca y aparta la que corresponde a la cantidad menor. Lo que queda es la diferencia. A esta misma diferencia y a este mismo proceso se puede llegar con preguntas distintas. Estas son las dos situaciones típicas, que requieren un mismo proceso:</p>	<p>because of the use of the language and based in common situations. Essentially, one has two unequal quantities; the minor quantity is removed from the major one. The remaining result is "the difference". One could reach to this "difference" and to this process by asking different questions; we present two classic situations requiring the same process:</p>
--	--

CM1?	En mi pandilla somos 8 amigos, y en la de Luna son 5. ¿Cuántos más somos en mi pandilla?	We are 8 friends on my gang, Luna's gang are 5. How many more do we are?
CM2	En mi pandilla somos 8 amigos, y en la de Luna son 5. ¿Cuántos menos son en la pandilla de Luna?	We are 8 friends on my gang, Luna's gang are 5. How many less do they are?

<p>En definitiva, la sustracción abre el abanico total de posibilidades. El formato EA practica intensivamente la suma. El formato ED tan solo de manera parcial. Finalmente, el formato CD no necesita usar ese recurso.</p>	<p>In short, subtraction opens up a full range of possibilities. The Ascending Ladder format intensively involves addition, while Descending Ladder format makes it partially. Finally, the Comparison-Difference format does not need to use that resource.</p>
---	---

VIII. GENERALIZACIÓN DE LA TABLA DE MULTIPLICAR A TODOS LOS ÓRDENES DE MAGNITUD. USO EN LA DIVISIÓN. GENERALIZATION OF THE MULTIPLICATION TABLE

CBC	ABN
<p>El alumnado con el CBC tiene dificultades para desarrollar de forma fluida estrategias de generalización de magnitudes.</p> <p>CBC students should have difficulties to fluently develop magnitude generalization strategies.</p>	<p>Lo que el alumno sepa hacer con las unidades simples, también debe hacerlo con las de orden superior. E incluso extender las tablas de multiplicar de manera tal que algunos productos y cocientes (en la división) por dos cifras se resuelvan como si sólo tuvieran una.</p> <p>Por ejemplo, 8×2 (16), lo extiende a 8×20 (160) , a 8×200 (1600) y también a las unidades de orden inferior; $8 \times 0,2$ (1,6); $8 \times 0,02$ (0,16),...</p> <p>What the student knows how to make with simple units, must be also made with those of higher order. And even extending the multiplication tables in such a way that some two digits</p>

multiplications and divisions (in the division fact) are solved as if they had only one

Si el alumno sabe sumar $3 + 4$, entonces aprende a hacerlo con decenas ($30 + 40$). Puede hacerlo con centenas ($300 + 400$), millares, etc. Ocurre exactamente igual en la sustracción, multiplicación y división.

If the student knows how to solve $3 + 4$, then he learns to do it with tens ($30 + 40$). He can do it with hundreds ($300 + 400$), thousands, etc. the same happens in subtraction, multiplication and division.

	643 x 54	
600	30.000	—
40	2.000	34.560
3	150	34.722

En esta fotografía que corresponde a un alumno del curso 2º curso de Educación Primaria (7 a 8 años) realizando una multiplicación de 643×54 , se puede observar la generalización. Multiplica 600 por 50 (30000). Luego por 4 (2400) y suma ambos resultados (32400). Lo mismo hace con el 40 y con el 3. La acumulación de resultados, tanto en cada orden de magnitud como en la acumulación de los anteriores, requiere una actuación similar en la suma, como se puede comprobar.

This picture corresponds to a student in the 2nd grade of Primary Education (7 to 8 years old). She is solving a multiplication: 643×54 . Generalization can be observed. She multiplies 600×50 (30000), then by 4 (2400) and add both results (32400). She does the same with 40 and 3. The accumulation of results, both in

each order of magnitude and in the accumulation of the previous ones, requires a similar action in the sum, as can be verified.

	324 x 11	
	x 11	
300	3300	
20	220	3520
4	44	3564

Ciertamente, los alumnos no empiezan a multiplicar por dos cifras a partir de ejemplos como el anterior (643 x 54). Cuando los alumnos van a abordar el producto y el cociente empleando dos dígitos (*bidígitos*), hay que comenzar a hacerlo por números que puedan seguir utilizando como de una sola cifra.

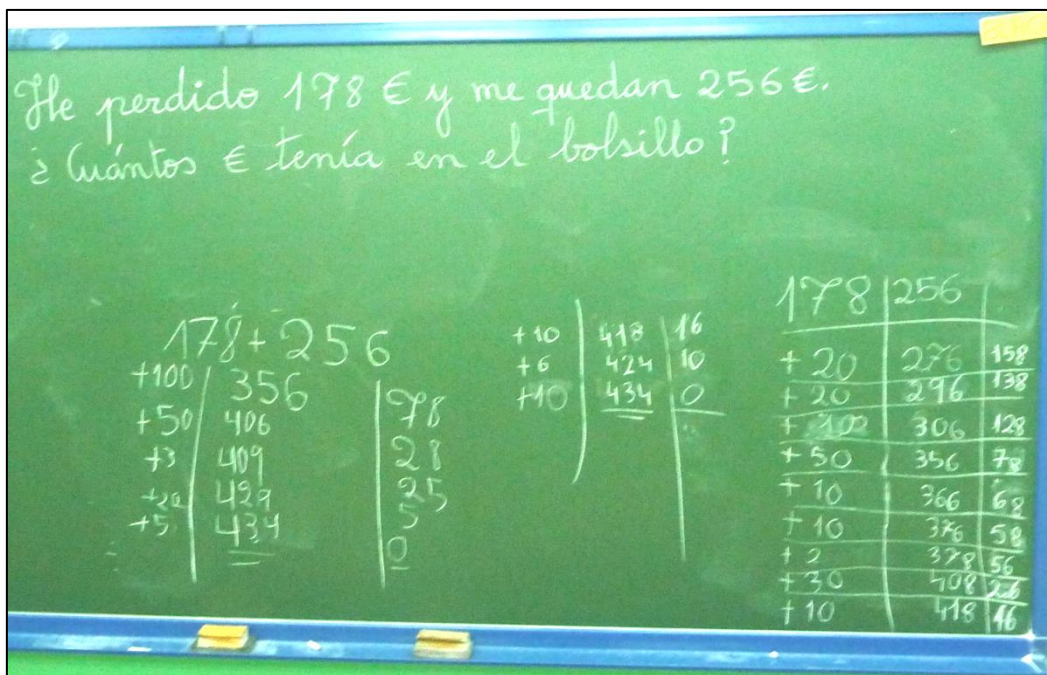
Certainly, students do not begin multiplying by two digits from examples like 643 x 54. They just star with one digit. When the students are going to approach to multiplication and division using two digits multiplier or dividers (bidigits), it is neededy to start by doing it with numbers which they can continue using as a single digit.

Por ejemplo, pueden comenzar a aprender la multiplicación por dos cifras por 11. Lo mismo ocurre con la división. En la tabla en la que representamos el producto de **324 x 11** se ilustra lo que se quiere decir. Actuamos igual cuando se trata de productos por decenas completas (20, 40, etc.) o divisiones en las que el divisor sea de estas mismas características.

For example, they can begin learning multiplication by two digits (11). The same occur for division. The table in which we represent the product of **324 x 11** illustrates what is meant. The same procedure is applied when it comes to multiplications by full tens (20, 40, etc.) or divisions in which the divisor has these same characteristics.

IX. CÁLCULOS A LA MEDIDA DE CADA ALUMNO Y DE CADA ALUMNA. CALCULATIONS ADAPTED TO EACH STUDENT

CBC	ABN
<p>En el cálculo tradicional sólo cabe hacer la operación bien o mal.</p> <p>In the traditional calculation it is only possible to perform the operation right or wrong.</p>	<p>En el ABN hay muchas maneras de hacerlas bien. Con la particularidad de que muchos de los alumnos que les costase más realizar las operaciones, lo podrían hacer dando más pasos o empleando cálculos menos sofisticados.</p> <p>ABN has several ways to perform right calculations. With the peculiarity that those students who found difficult to carry out a calculation, could proceed by taking additional steps or using easier calculation.</p>



La foto que acompaña al párrafo muestra la resolución de un problema por dos alumnos diferentes. Una niña muy capaz y un niño con menos recursos. Los dos se encuentran en el mismo curso de 2º de Educación Primaria. En el primer caso, el cálculo se efectúa en cinco pasos (izquierda de la pizarra). En el segundo, el niño requiere de doce pasos.

Picture shows how two different students solve the same math-problem. A smart girl and a boy with fewer resources. The two are in the same classroom in 2nd grade Primary Education. On the left of the board the calculation is carried out in five steps. On the right side, the child uses twelve steps. *Problem:* "I have lost 178 euros, and I have 276 left. How many euros did I have in my pocket?"

Las posibilidades del cálculo abierto (ABN), traducen a la realidad una de las más viejas y difíciles aspiraciones de la didáctica: que cada alumno pueda hacer la misma tarea, pero cada uno de acuerdo con sus posibilidades, con su ritmo, con sus propias capacidades. Si las operaciones se pueden resolver de una única manera, tal aspiración sería muy difícil. Hicimos una actividad con un grupo de alumnos de 2º de Educación Primaria y controlamos cómo hacía cada uno la sustracción indicada (**948 - 176**). Estos son los resultados que se obtuvieron:

The ABN method manages to translate to the real educational experiences of the oldest and most difficult ambitions of teaching: that each student can do the same task, but each one according to their possibilities, with their own learning rhythm, and with their own capabilities. If a calculation can be solved in only one way, such expectation would be very difficult. We did a task with the whole classroom of 2nd grade Primary Education students, and we controlled how each one did the subtraction **948 - 176**. These are some results:

948 – 176 = 772					
Student #	Steps	Steps' decription.			
		Step 1	Step 2	Step 3	Step 4
1	4	100	6	40	30
2	3	140	6	30	
3	3	106	50	20	
4	3	100	70	6	
5	3	100	50	26	
6	3	100	46	30	
7	3	100	40	36	
8	3	40	6	130	
9	2	148	28		
10	2	146	30		
11	2	106	70		

La tabla no es difícil de describir. El alumno 1 realizó la operación en 4 pasos. Primero retiró de ambas cantidades 100. Después 6, luego 40 y finalmente 30. El 2 la hace en tres pasos, y comienza retirando 140, luego 6 y después 30. Etc. Se puede comprobar la riqueza y variedad de estrategias y cálculos, donde cada uno las va haciendo conforme a sus propios intereses y atendiendo a la evolución de la operación.

Table description: Student 1 performed the task in 4 steps. Student #1 withdrew 100 from both numbers. Then 6, then 40 and finally 30. The student #2 does it in three steps, and begins by withdrawing 140, then 6 and then 30. Etc. One can check the productivity and variety of strategies and calculations. Each student is doing the task according to their own interests and attending to the evolution of the math-operation.

Existirían numerosas maneras de poder resolver las operaciones. Pongamos de nuevo un ejemplo con la división de $76 : 3$, resuelta de 10 maneras diferentes por distintos alumnos/as. Más adelante aprenderá estrategias para que la aproximación al dividendo y la realización de los cálculos se hagan con eficacia y economía

There would be many ways to solve the math-operations. Let's take an example again with the division $76 : 3$. This time the division was solved in 10 different ways by students. Later, they will learn strategies to approach the dividend and carry out the calculations efficiently and cost-effectively (less time consuming).

<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">76 : 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>76</td> <td>60</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>25</td> </tr> </tbody> </table>	76 : 3			76	60	20	16	6	2	10	6	2	4	3	1	1		25	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">76 : 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>76</td> <td>60</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>25</td> </tr> </tbody> </table>	76 : 3			76	60	20	16	3	1	13	3	1	10	3	1	7	6	2	1		25
76 : 3																																								
76	60	20																																						
16	6	2																																						
10	6	2																																						
4	3	1																																						
1		25																																						
76 : 3																																								
76	60	20																																						
16	3	1																																						
13	3	1																																						
10	3	1																																						
7	6	2																																						
1		25																																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">76 : 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>76</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>70</td> <td>60</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>25</td> </tr> </tbody> </table>	76 : 3			76	6	2	70	60	20	10	6	2	4	3	1	1		25	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">76 : 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>76</td> <td>30</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>46</td> <td>30</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>9</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>6</td> <td>25</td> </tr> </tbody> </table>	76 : 3			76	30	10	46	30	10	16	9	3	7	6	2	1	6	25			
76 : 3																																								
76	6	2																																						
70	60	20																																						
10	6	2																																						
4	3	1																																						
1		25																																						
76 : 3																																								
76	30	10																																						
46	30	10																																						
16	9	3																																						
7	6	2																																						
1	6	25																																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">76 : 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>76</td> <td>66</td> <td>22</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>3</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>25</td> </tr> </tbody> </table>	76 : 3			76	66	22	10	6	2	4	3	1	1		25	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">76 : 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>76</td> <td>30</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>46</td> <td>30</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>9</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>25</td> </tr> </tbody> </table>	76 : 3			76	30	10	46	30	10	16	9	3	7	6	2	1		25						
76 : 3																																								
76	66	22																																						
10	6	2																																						
4	3	1																																						
1		25																																						
76 : 3																																								
76	30	10																																						
46	30	10																																						
16	9	3																																						
7	6	2																																						
1		25																																						
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">76 : 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>76</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>70</td> <td>60</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>9</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>25</td> </tr> </tbody> </table>	76 : 3			76	6	2	70	60	20	10	9	3	1		25	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">76 : 3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>76</td> <td>60</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>6</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>9</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td></td> <td>25</td> </tr> </tbody> </table>	76 : 3			76	60	20	16	6	2	10	9	3	1		25									
76 : 3																																								
76	6	2																																						
70	60	20																																						
10	9	3																																						
1		25																																						
76 : 3																																								
76	60	20																																						
16	6	2																																						
10	9	3																																						
1		25																																						

	76 : 3	
76	66	22
10	9	3
1		
		25

	76 : 3	
76	15	5
61	60	20
1		
		25

X. TODAS LAS TAREAS DE CÁLCULO REQUIEREN QUE SE EFECTÚEN CÁLCULOS. ALL CALCULATION TASKS REQUIRE CALCULATIONS TO BE SOLVED.

CBC	ABN
<p>La realización de tareas de cálculo con el modelo tradicional no promueve la habilidad de calcular... porque no siempre se calcula. Cuando un alumno resuelve una multiplicación tradicional aplica instrucciones previamente memorizadas y recupera de su memoria a largo plazo las combinaciones básicas -o tablas de multiplicar- que previamente ha interiorizado. Así, en 278×3 suele resolver de la siguiente manera: tomo el ocho y lo emparejo con el tres; ahora busco en mi memoria el resultado de multiplicarlos; de los 24 que me da escribo el 4 en línea con el 8. Almaceno en la memoria el 2; tomo ahora el 7 y lo multiplico por 3; busco el resultado.... etc. Las operaciones se harán mejor o peor en función de la buena memoria del alumno o de la fidelidad que tenga en la aplicación de las instrucciones.</p> <p>Carrying out calculation tasks with the traditional algorithm does not promote the ability to calculate... because th student is not always using calculus. When a student solves a traditional multiplication, he/she applies previously memorized instructions and retrieves from his/her Long-Term Memory the basic combinations -or multiplication tables- that he/she has previously internalized. Thus, 278×3 is usually solved in the following way: (i) Taking the 8 and pairing it with the 3; now looking in my memory for the result of multiplying them (ii) From the result of 24, one writes the 4 in line with the 8, and stores 2 in memory; (iii) Next step is to the 7 and multiply</p>	<p>Con el método ABN el cálculo se realiza de manera continuada: la realización de los algoritmos está basada en el cálculo personal. Esto explica la variedad de procedimientos que emplean los alumnos en la resolución de las operaciones de cálculo. Esas diferencias entre unos procedimientos y otros es una de las características que definen ABN: no pueden haber sido memorizadas previamente.</p> <p>ABN method carries out all calculations at the time: the routine of the algorithms is based on personal strategies. This describes the variety of procedures used by students in solving calculation. These differences between some procedures and others is one of the characteristics that define ABN method: ABN-algorithms cannot have been previously memorized.</p>

<p>it by 3; then look for the result.... etc. The math-operations will succeed or nor depending on the good student's memory or the accuracy he/she has in applying the instructions.</p>	
---	--

XI. NÚMEROS Y CIFRAS. NUMBERS & CIPHERS

The ABN method works with *numbers*, while CBC does it with *ciphers*.

<u>CBC</u>	<u>ABN</u>
<p><u>Algoritmos basados en cifras</u></p> <p><u>Closed Algorithm Based on Cipher</u></p>	<p><u>Algoritmos basados en números</u></p> <p><u>Open Algorithm Based on Numbers</u></p>
<p><i>Número</i>: concepto abstracto que engloba la cantidad y la cardinalidad (se usa para producir, medir u ordenar colecciones). El número puede codificarse (nombrarse) de forma verbal y gráfica. Cada una de las grafías que codifican al número, se llama cifra. Existen distintas grafías para el número... por ejemplo la decimal o la romana.</p> <p>Así, la <i>cifra</i> es un subproducto del número. La cifra es una consecuencia de querer codificar al número de forma gráfica. El sistema CBC utiliza las peculiaridades del sistema de codificación decimal (en centenas-decenas-unidades) para establecer un algoritmo de cálculo. El sistema ABN, por el contrario, recurre a las propiedades del número para establecer atajos de cálculo basados en la descomposición de cantidades.</p> <p>A number is an abstract concept which comprises the quantity and the cardinality. It is used for producing, measuring and ordering collections and can be verbally and graphically coded (labeled). Each graphical expression used for coding a number is known as a digit. There are many ways for a graphical codification of the number... such as the decimal and the roman coding.</p> <p>So, a digit is a <i>byproduct</i> of the number. It is: the cypher is a consequence of the need for graphically coding the number. CBC system uses the inner properties of the decimal coding system (such as the hundreds-tens-units structure) to stablish an algorithm. On the other hand, the ABN system uses number-related properties to stablish calculus shortcuts by decomposing the quantities of the number.</p>	

Bibliografía sobre ABN

(ABN books)

Educación Infantil

(Early Education) (3 to 5 y.o.)

Jaime Martínez Montero, José Miguel de la Rosa Sánchez, & Concepción Bonilla Arenas (2016). *Matemáticas ABN 1. (Cuadernos 1 y 2) (Método ABN) Educación Infantil*. Anaya. ISBN: 978-8467832389

García Martínez, L & Murillo García, M. (2021). *ABNizando cuentos en educación infantil (3 años): Por y para una escuela que engloba la matemática con el mundo de la literatura infantil*. Madrid. Wolters Kluwer. ISBN: 978-8499872193

Educación Primaria

(Primary Education, 6 to 11 y.o.)

Martínez Montero, J. & Sánchez Cortés, C. (2019). *Enriquecimiento de los aprendizajes matemáticos en Infantil y Primaria con el Método ABN*. Pirámide. ISBN:978-84-368-4079-7

Martínez Montero, J.; De la Rosa Sánchez, J. M. & Sánchez Cortés, C. (2019). *Matemáticas Educación Primaria método ABN*. Anaya. ISBN: 978-84-678-6257-7

Martínez Montero, J., Sánchez Cortés, C., y de la Rosa Sánchez, J. M. (2020). *Enseñar matemáticas con el método ABN en 4º, 5º y 6º y preparación para la ESO*. Madrid. Wolters Kluwer.

Martínez Montero, J. & Sánchez Cortés, C. (2021). *¿Por qué los escolares fracasan en matemáticas?*. Madrid: Wolters Kluwer.

Necesidades Educativas Especiales.

(Special Education Needs students.)

Martínez Montero, J. (2017). *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales*. 3ª edición. Madrid: Wolters Kluwer.

Blogs ABN:

<http://algoritmosabn.blogspot.com/>

<https://abn.anaya.es/>

Articles

- Aragón, E., Canto, M.C., Marchena, E., Navarro, J.I. & Aguilar, M. (2017). Cognitive profile in learning mathematics with open calculation based on numbers (ABN). *Revista de Psicodidáctica*, 22 (1), 54-59. <https://dx.doi.org/10.1387/RevPsicodidact.16396>
- Canto-López, M.C., Aguilar, M., García-Sedeño, M.A., Navarro, J.I., Aragón, E., Delgado, C. & Mera, C. (2019). Numerical estimation and mathematical learning methodology in pre-schoolers. *Psychological Reports*, 124(2), 438-458 <https://doi.org/10.1177/0033294119892880>.
- Canto López MC, Manchado Porras M, Piñero Charlo JC, Mera Cantillo C, Delgado Casas C, Aragón Mendizábal E & García Sedeño MA (2022) Description of main innovative and alternative methodologies for mathematical learning of written algorithms in primary education. *Frontiers in Psychology*. 13:913536. <https://dx.doi.org/10.3389/fpsyg.2022.913536>
- Cerda, G., Aragón, E., Pérez-Wilson, C., Navarro, J.I. & Aguilar, M. (2018). The Open Algorithm Based on Numbers (ABN) method: An effective instructional approach to domain-specific precursors of arithmetic development. *Frontiers in Psychology*, 9: 1811 <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01811>